INSTITUT DES HAUTES ETUDES

POUR LE DEVELOPPEMENT DE LA CULTURE, DE LA SCIENCE ET DE LA TECHNOLOGIE EN BULGARIE

http://www.iheb.org/

Concours Général de Physique "Minko Balkanski"

14 Mai 2017

Прочетете внимателно!

Част първа и част втора съдържат условията на задачите съответно на френски и на английски език. Единствените външни документи, на които имате право са френски и английски речници. Ако желаете, можете да ползвате калкулатори. При оценяването на задачите голяма тежест ще имат яснотата и стилът на изложените решения и аргументация. Не използвайте излишна проза в аргументите си, бъдете точни и кратки. Използването на схеми за онагледяване на разсъжденията Ви е желателно. Пишете само на езика, който сте избрали (френски или английски).

При намиране на грешка в условията на задачите отбележете я в работата си и продължете без да повдигате въпроси към квесторите.

Класирането ще бъде изложено на сайта http://balkanski-foundation.org/ месец по-късно. Ако имате въпроси и коментари можете да ги насочите към svilen.iskrov@google.com. С първенците ще се свържем чрез e-mail или по телефон. Попълнете правилно информацията за контакт.

Разполагате с 4 часа. Успех!

Première partie

Français

Problème I

Le rayon de la Terre $R = 6400\text{km}$ et l'accélération gravitationnelle au niveau du sol $g = 9,8\text{m.s}^{-2}$ sont connus. Un satellite de masse $m = 500\text{kg}$ est lancé depuis la Terre. Son orbite est circulaire d'altitude $r_0 = 400\text{km}$.
1. Déterminez sa vitesse v_0, sa période de révolution autour de la Terre T_0 et son énergie mécanique E_m.

Suite à une erreur de lancement, l'orbite du satellite n'est pas parfaitement circulaire. L'apareil est abandonné en M_0, tel que $OM_0 = r_0$, où O est le centre de la Terre et r_0 est le rayon de l'orbite désirée. Sa vitesse est de norme v_0, mais faisant un angle α avec la tangente de l'orbite circulaire (Fig.2).
2. Quelle est la nature géométrique de la trajectoire du satellite ? Expliquez votre raisonement.
3. Expliquez pourquoi le moment cinétique est conservé lors du mouvement du satellite et l'utilisez pour exprimer l'énergie mécanique du satellite en fonction de r, $\frac{\text{d}r}{\text{d}t} = v_\text{r}$, m, g, R, r_0, v_0 et $\cos(\alpha)$.
4. En déduire r_min (resp. r_max) – la distance minimale (resp. maximale) entre la Terre et le satellite en fonction des paramètres du problème.
5. Calculez T_1 – la période de révolution du satellite autour la Terre et la comparez à T_0. Etait-ce prévisible ?
6. Expliquez en détail (et avec calculs) quelles corrections à la trajectoire on peut faire pour conduire le satellite à suivre l'orbite circulaire de départ, sachant que le satellite est équipé d'un moteur.

Problème II

Une molécule de HCl est modélisée par deux atomes : H et Cl, séparés par une distance r sur un axe supposé fixe dans le référentiel galiléen R_g d'origine Cl. L'atome H, assimilé à un point matériel de masse $m = 1,66.10^{-27}\text{kg}$, est en mouvement dans R_g sous l'action de forces dérivant d'une énergie potentielle

$$E_p = \frac{C}{r^{12}} - \frac{K}{r} \text{ avec } C = 1,06.10^{-138}\text{J.m}^{12} \text{ et } K = 92,16.10^{-3}\text{J.m}\,.$$

1. Tracer l'allure de $E_p(r)$ et indiquer, puis calculer, la position d'équilibre r_0. Discuter la stabilité de la position d'équilibre r_0.
2. Quelle est l'énergie de dissociation de la molécule HCl ?
3. Déterminer la fréquence des petites oscillations autour de la position d'équilibre.

Problème III

On a relevé la caractéristique statique d'un dipôle appelé «Diode Zener», en convention récepteur.

U[V]	0.0	2.0	4.0	6.0	6.2	6.4	6.6	6.8	7.0	7.2
I[mA]	0	0	0	0	50	100	150	200	250	300

1. Tracer la caractéristique I en fonction de U. S'agit-il d'un dipôle linéaire ?
2. Modélisation : linéarisation par partie.

- Comment ce dipôle se comporte-t-il pour $0\text{V} \leqslant U \leqslant 6\text{V}$?
- Déterminer l'équation de I en fonction de U, puis U en fonction de I pour $6,0\text{V} \leqslant U \leqslant 7,2\text{V}$. En déduire la tension et résistance équivalentes à ce dipôle sur cet intervalle.

3. On associe à cette diode une pile avec $E = 12\text{V}$ et de résistance interne $r = 40\Omega$. Déterminer graphiquement le point de fonctionnement (valeur de U et I pour la diode où elle est connectée à la pile).

Problème IV

L'accélération gravitationnelle g est considérée indépendante de l'altitude et égale à $9,8\text{m.s}^{-2}$. Tous les gaz sont considérés parfaits. On note $R = 8,314$, en unités SI, la constante des gaz parfaits, avec M_a la masse molaire de l'air, P sa pression, T sa température et ρ sa masse volumique, P_0, T_0, ρ_0 sont les valeurs resp. de P, T et ρ au niveau du sol ($z = 0$).

Partie 1 - Modèles de l'atmosphère

Atmosphère isotherme

Supposons, dans un premier temps, que l'atmosphère est isotherme - sa température est constante et uniforme $T_0 = 290\text{K}$.
1. Exprimez la densité de l'air en fonction de P, R, T_0 et M_a.
2. Ecrivez la condition d'équilibre hydrostatique de l'air, en prenant l'accélération gravitationnelle $g = 9,8\text{m.s}^{-2}$. Intégrez pour trouver la pression en fonction de l'altitude z, la pression au niveau du sol P_0 et $H = \frac{RT_0}{gM_\mathrm{a}}$.
Indication : Considérez une tranche de l'atmosphère d'épaisseur dz (infinitesimale) et de section S.
3. Supposons que l'air atmosphèrique est composé de 20% O_2 et de 80% N_2. Calculez les valeurs numériques de M_a et de H, expliquez la signification physique de H, sachant que l'oxygène est composée de 16 nucléons et l'azote – de 14, et $m_\text{proton} \approx m_\text{neutron} \approx 1,67.10^{-27}\text{kg}$.

Température qui varie linéairement

Tentons d'améliorer le modèle en prenant en compte les variations de la température en altitude. Pour le reste du problème on considère $T(z) = T_0.(1 - \alpha z)$, où $\alpha = \frac{1}{z_0} > 0$ et $z_0 = 30\text{km}$. Cette approximation est valable pour $z < 10\text{km}$.
4. Injectez cette nouvelle loi de variation de la température dans la condition (différentielle) d'équilibre hydrostatique, établie dans question 2. Intégrez et établissez $P(z) = P_0.(1-\alpha z)^\beta$ et $\rho(z) = \rho_0.(1-\alpha z)^{\beta-1}$, en donnant la forme explicite de β en fonction de H et de z_0.
5. En se servant des formules établies aux questions 2 et 4, calculez l'altitude z_1 (resp. z_2) pour le modèle isotherme (resp. pour le modèle des variations linéaires de la température) pour laquelle la pression est égale à $\frac{1}{2}P_0$. Comparez les deux valeurs. Ce résultat, était-il prévisible ?

Pour la suite du problème, prenons les valeurs numériques suivantes : $\beta = 5$, $T_0 = 290\text{K}$, $z_0 = 40\text{km}$ et $P_0 = 10^5\text{Pa}$.

Partie 2 - Equilibre mécanique de la montgolfière

Dans cette partie du problème on adoptera le dernier modèle de l'atmosphère (avec temperature qui varie linéairement). On note $P_\mathrm{e}, T_\mathrm{e}$ et ρ_e la pression, la température et la densité de l'atmosphère à l'altitude z. La montgolfière est constituée d'une enveloppe de volume intérieur $V_0 = 2000\text{m}^3$ et d'une nacelle où les passagers sont situés (Fig.1). La masse totale de la nacelle, des passagers et de l'enveloppe est notée $m = 500\text{kg}$ et la masse de l'air à l'intérieur de l'enveloppe est notée m_i. Ainsi la masse totale du système est $m + m_\mathrm{i}$. On note T_i la température et P_i la pression à l'intérieur de l'enveloppe, toutes deux supposées uniformes. On suppose aussi que l'ouverture de l'enveloppe assure que la pression à l'intérieur est égale à la pression atmosphérique, mais on remarque qu'une différence des températures est possible (même nécessaire). On suppose aussi que la composition du gaz reste inchangée lors de la phase d'ascension.
6. Exprimez la masse m_i de l'air chaud contenu dans l'enveloppe en fonction de $T_\mathrm{i}, R, M_\mathrm{a}, V_0, P_\mathrm{e}$, puis en fonction de $\rho_\mathrm{e}, V_0, T_\mathrm{e}, T_\mathrm{i}$.
7. La montgolfière est en équilibre mécanique. Exprimez m en fonction de $m_\mathrm{i}, T_\mathrm{i}$ et T_e.
Indication : À l'équilibre mécanique le poids est compensé par la poussée d'Archimède.
8. On note z_m l'altitude à laquelle la poussée d'Archimède est compensée par le poids mg (et *non pas* $(m+m_\mathrm{i})g$). Exprimez z_m en fonction de α, β, m, ρ_0 et V_0. Calculez sa valeur numérique.
9. On note T_d la valeur minimale de la température T_i permettant le décollage de la montgolfière. Etablissez la relation liant $\frac{m}{\rho_0 V_0}$ et $1 - \frac{T_0}{T_\mathrm{d}}$. Calculez la valeur numérique de T_d.
10. Etablissez la condition d'équilibre mécanique de la montgolfière suivante :

$$P_\mathrm{e} \cdot \left(\frac{1}{T_\mathrm{e}} - \frac{1}{T_\mathrm{i}}\right) = C \cdot \left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T_\mathrm{d}}\right) ,$$

où C est une constante à déterminer.

Admettons la relation suivante, qui est une conséquence directe de la dernière question,

$$\frac{\delta T_\mathrm{i}}{T_\mathrm{i}} = \frac{T_\mathrm{i}}{T_\mathrm{e}}\frac{\delta T_\mathrm{e}}{T_\mathrm{e}} + \frac{\delta P_\mathrm{e}}{P_\mathrm{e}} \cdot \left(1 - \frac{T_\mathrm{i}}{T_\mathrm{e}}\right) ,$$

où δ signifie une variation infinitésimale.
11. En utilisant les grandeurs réduites $Z = \alpha z$, $Z_\mathrm{m} = \alpha z_\mathrm{m}$ et $\theta_\mathrm{i} = \frac{T_\mathrm{i}}{T_0}$, montrez que la condition d'équilibre de la question 7 s'écrit

$$(1 - Z)^\beta = \frac{m}{\rho_0 V_0} + \frac{(1 - Z)^\beta}{\theta_\mathrm{i}} .$$

Exprimez θ_i en fonction de Z, Z_m et β.
12. Supposons que $\frac{\mathrm{d}\theta_\mathrm{i}}{\mathrm{d}Z}(0)$ est de même signe que $\frac{\beta m}{\rho_0 V_0} - 1$. Tracez rapidement l'allure de $\theta_\mathrm{i}(Z)$ pour $\beta m > \rho_0 V_0$ et pour $\beta m < \rho_0 V_0$ et expliquez pourquoi le deuxième cas fait courir un risque pour les passagers (considèrez la phase d'atterrissage).
13. Calculez la valeur numérique de V_max - le volume maximal de l'enveloppe, pour lequel $\beta m > \rho_0 V_0$. Pour une valeur $T_\mathrm{max} = 380$K de la température maximale acceptable pour l'air chaud contenu dans l'enveloppe, calculez V_min - le volume minimal de l'enveloppe que permet le décollage. Calculez z_m pour les deux volumes.

Des maths utiles :

$\ln(2) = 0,7$; $2^{-\frac{1}{3,5}} = 0,82$; $0,2^{0,25} = 0,67$; $\left(\frac{0,4}{1,8}\right)^{0,25} = 0,69$; $(\frac{0,4}{2,1})^{0,25} = 0,66$.

Les solutions de $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \alpha y$ sont de la forme $y(x) = \mathrm{Const}.e^{\alpha x}$.

Les solutions de $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\alpha y}{1-\beta x}$ sont de la forme $y(x) = \mathrm{Const}.(1-\beta x)^\gamma$, avec γ fonction de α et de β.

——— **FIN DE L'ENONCE** ———

Part II
English

Problem I

Earth's radius $R = 6400\text{km}$ and the gravitational acceleration at ground level $g = 9,8\text{m.s}^{-2}$ are considered known. A satellite of mass $m = 500\text{kg}$ is launched from Earth. Its orbit is circular of altitude $a_0 = 400\text{km}$.
1. Determine its velocity v_0, its period of revolution around the Earth T_0 and its mechanical energy E_m.

However, due to a problem during the launch, the orbit of the satellite is not exactly circular. Instead the velocity vector forms an angle α with the tangent to the circular orbit, its magnitude is v_0. The apparatus is initially at M_0 such that $OM_0 = r_0$, where O is the center of the Earth and r_0 is the radius of the desired orbit (Fig.2).
2. What is the geometrical shape of the trajectory in this case? Explain your answer.
3. Explain why the angular momentum is conserved and use this result to express the mechanical energy of the satellite as a function of r, $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = v_\text{r}$, m, g, R, r_0, v_0 and $\cos(\alpha)$.
4. Find r_min (resp. r_max) – the minimal (resp. maximal) distance between the Earth and the satellite as a function of the parameters given in the problem.
5. Calculate T_1 – the period of revolution around the Earth of the satellite and compare it to T_0. Was this result predictable?
6. Give a detailed explanation (supported with calculations) what corrections should be made to the trajectory in order to get the satellite in the original circular orbit of radius r_0, given that the satellite is equipped with an engine.

Problem II

A HCl molecule is modelled as a two body system of a hydrogen (H) and a chlorine (Cl) atoms separated by a distance r in an inertial frame R_g centred at Cl. The hydrogen atom is assumed to be a material point of mass $m = 1,66.10^{-27}\text{kg}$ submerged in a gravitational field derived by the potential energy E_p written as:

$$E_p = \frac{C}{r^{12}} - \frac{K}{r} \text{ with } C = 1,06.10^{-138}\text{J.m}^{12} \text{ and } K = 92,16.10^{-3}\text{J.m}\,.$$

1. Sketch (approximately) the potential energy $E_p(r)$ and explicitly draw the equilibrium distance r_0. Calculate r_0 and determine if it is a stable or unstable equilibrium.
2. What is the energy needed to break down the HCl covalent bond molecule?
3. What is the small oscillations frequency near the molecule's equilibrium state?

Problem III

The U/I characteristics of a Zener Diode in the positive direction is derived as follows:

U[V]	0.0	2.0	4.0	6.0	6.2	6.4	6.6	6.8	7.0	7.2
I[mA]	0	0	0	0	50	100	150	200	250	300

1. Draw I as a function of U. Is it a linear electrical component?
2. We can model this electrical circuit in two linear phases:

- What are the characteristics in the interval $0\text{V} < U < 6\text{V}$?
- Derive the equation of I as a function of U and U as a function of I in the interval $6,0\text{V} < U < 7,2\text{V}$. What is the equivalent circuit's voltage and resistance in that interval?

3. We construct an electrical circuit composed of a battery $E = 12\text{V}$, with internal resistance $r = 40\Omega$ and the aforementioned Zener Diode. Determine graphically what is the operating point of the diode (the value of U and I for the diode when connected to the battery).

Problem IV

The gravitational acceleration g is assumed to be independent of height and equal to $9,8\text{m.s}^{-2}$. All gases are assumed to follow the ideal gas law. We set $R = 8,314$, in SI units, the ideal gas constant and denote by M_a the molar mass of the air, by P its pressure, by T its temperature and by ρ its density. P_0, T_0, ρ_0 denote the values of the P, T and ρ at ground level ($z = 0$).

Part 1 - Models of the atmosphere

Isothermal atmosphere

We first assume the atmosphere to be isothermal – its temperature is constant and uniform $T_0 = 290\text{K}$.
1. Write down the density of the air as a function of P, R, T_0 and M_a.
2. Write down the condition of hydrostatic equilibrium of the air, taking for the gravitational acceleration $g = 9,8\text{m.s}^{-2}$. Integrate to find the pressure as a function of z – the height above the ground, P_0 – the pressure at the ground level and $H = \frac{RT_0}{M_a g}$.
Hint: Consider an infinitesimal slice of the atmosphere of cross-section area S and height dz.
3. Assume the air to be composed of 20% O_2 and 80% N_2. Calculate the numerical values of M_a and H, explain the physical significance of H, knowing that the oxygen has 16 nucleons and the nitrogen has 14 nucleons and $m_\text{proton} \approx m_\text{neutron} = 1,67.10^{-27}\text{kg}$.

Linear temperature variation model

We will now try to improve our model by taking into account the temperature variations in altitude. For the rest of the problem we assume $T(z) = T_0.(1 - \alpha z)$, where $\alpha = \frac{1}{z_0} > 0$ and $z_0 = 30\text{km}$. This approximation is trustworthy for $z < 10\text{km}$.
4. Substitute the new law for the temperature variations in the (differential) condition of hydrostatic equilibrium established in question 2. Integrate and establish that $P(z) = P_0.(1 - \alpha z)^\beta$ and $\rho(z) = \rho_0.(1 - \alpha z)^{\beta-1}$, giving the explicit form of β as a function of H and z_0.
5. Using the formulas established in questions 2 and 4 calculate the height z_1 (resp. z_2) at which the pressure is equal to $\frac{1}{2}P_0$ for the isothermal (resp. linear temperature variations) model. Compare them. Was the result foreseeable?

For the rest of the problem we will use the following numerical values: $\beta = 5$, $T_0 = 290\text{K}$, $z_0 = 40\text{km}$ and $P_0 = 10^5\text{Pa}$.

Part 2 - Mechanical equilibrium of a hot air balloon

In this part we will adopt the last (linearly varying temperature) atmospheric model. Denote by P_e, T_e and ρ_e the pressure, the temperature and the density of the atmosphere at altitude z. The balloon is composed of a bag, called an envelope, of fixed volume $V_0 = 2000\text{m}^3$ and a basket beneath it, where the passengers are situated (Fig.1). The total mass of the basket, the passengers and the envelope itself is denoted $m = 500\text{kg}$ and the mass of the air inside the envelope is m_i, so that the total mass of the system is $m + m_\text{i}$. We will denote by T_i the temperature and by P_i – the pressure inside the envelope, which are assumed to be uniform. Furthermore, the opening in the envelope ensures the pressures inside and outside of it to be equal, but a temperature difference is possible (even necessary). We also assume the gas composition to be the same throughout the ascent phase.
6. Write down the mass m_i of the hot air inside the envelope as a function of $T_\text{i}, R, M_\text{a}, V_0, P_\text{e}$. Then express it also as a function of $\rho_\text{e}, V_0, T_\text{e}, T_\text{i}$.
7. The balloon is at mechanical equilibrium. Express m as a function of m_i, T_i and T_e.
Hint: At mechanical equilibrium the weight of the system is exactly compensated by the buoyant force (Archimedes' principle).
8. Let z_m be the altitude at which the buoyant force is exactly compensated by the weight mg (and *not* $(m + m_i)g$). Find z_m as a function of α, β, m, ρ_0 and V_0. Calculate its numerical value.
9. Let T_d be the minimal value of the temperature T_i for which the balloon could take off. Establish a relation between $\frac{m}{\rho_0 V_0}$ and $1 - \frac{T_0}{T_\text{d}}$. Calculate T_d.
10. Establish the following relation for the balloon at mechanical equilibrium

$$P_\text{e} \cdot \left(\frac{1}{T_\text{e}} - \frac{1}{T_\text{i}}\right) = C\left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T_\text{d}}\right),$$

where C is a constant to be determined.

We now admit the following relation, deducible directly from the last question,

$$\frac{\delta T_{\mathrm{i}}}{T_{\mathrm{i}}} = \frac{T_{\mathrm{i}}}{T_{\mathrm{e}}}\frac{\delta T_{\mathrm{e}}}{T_{\mathrm{e}}} + \frac{\delta P_{\mathrm{e}}}{P_{\mathrm{e}}}\left(1 - \frac{T_{\mathrm{i}}}{T_{\mathrm{e}}}\right) ,$$

where δ stands for small (infinitesimal) variations.

11. Using the new variables $Z = \alpha z$, $Z_{\mathrm{m}} = \alpha z_{\mathrm{m}}$ and $\theta_{\mathrm{i}} = \frac{T_{\mathrm{i}}}{T_0}$, write down the equilibrium condition from question 7 in the following form

$$(1 - Z)^{\beta} = \frac{m}{\rho_0 V_0} + \frac{(1 - Z)^{\beta}}{\theta_{\mathrm{i}}} .$$

Express θ_{i} as a function of Z, Z_{m} and β.

12. In this question we suppose $\frac{\mathrm{d}\theta_{\mathrm{i}}}{\mathrm{d}Z}(0)$ to be of the same sign as $\frac{\beta m}{\rho_0 V_0} - 1$. Plot roughly $\theta_{\mathrm{i}}(Z)$ for $\beta m > \rho_0 V_0$ and $\beta m < \rho_0 V_0$ and explain why the second case is not safe for the passengers (consider the landing phase).

13. Calculate the numerical value of $V_{\max}$ – the maximal volume of the envelope for which $\beta m > \rho_0 V_0$. If the air in the envelope can be heated up to $T_{\max} = 380\mathrm{K}$, find $V_{\min}$ – the minimal volume which enables the balloon to take off. Calculate z_{m} for both volumes.

Useful Mathematics:

$\ln(2) = 0,7$; $2^{-\frac{1}{3,5}} = 0,82$; $0,2^{0,25} = 0,67$; $\left(\frac{0,4}{1,8}\right)^{0,25} = 0,69$; $\left(\frac{0,4}{2,1}\right)^{0,25} = 0,66$.

The solutions to $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \alpha y$ are of the form $y(x) = \mathrm{Const}.e^{\alpha x}$.

The solutions to $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\alpha y}{1-\beta x}$ are of the form $y(x) = \mathrm{Const}.(1 - \beta x)^{\gamma}$, with γ a function of α and β.

——— **END OF PAPER** ———

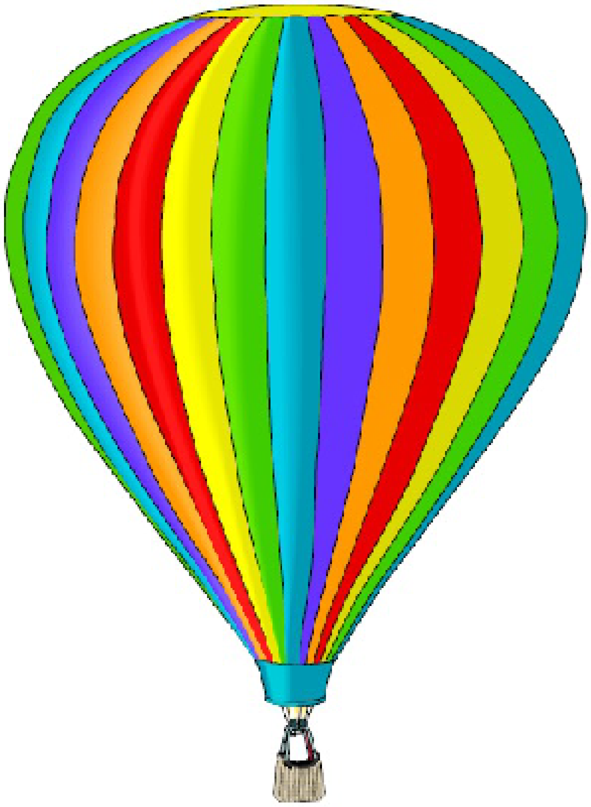

Figure 1: Balloon

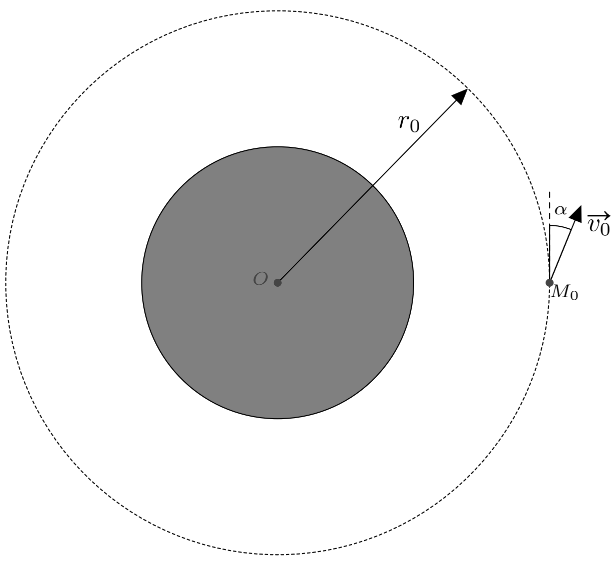

Figure 2: Satellite